新しい数をつくる

松本佳彦

大阪大学 & スタンフォード大学

2018 年 6 月 29 日

自己紹介

松本佳彦（まつもとよしひこ）

- 大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻 助教（昔で言うところの「助手」です）
- 日本学術振興会 海外特別研究員
- スタンフォード大学 数学科 Visiting Assistant Professor（何も教えてない）

《経歴》

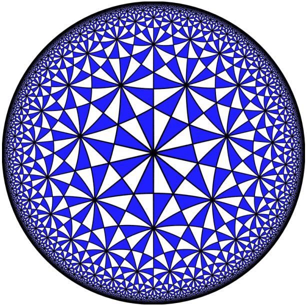
- 2013/3　東京大学 大学院数理科学研究科 博士課程 修了
- 2013/4–2014/3　同研究科 教務補佐員
- 2014/4–2016/3　日本学術振興会 特別研究員-PD @ 東京工業大学
  - 2014/11–2015/6　École normale supérieure（パリ）滞在
- 2016/4　大阪大学に着任
- 2017/9–2019/8　スタンフォード滞在

スタンフォード大学数学科にいます

campus-map.stanford.edu

研究の概要

- 微分幾何学——曲がった空間の幾何学
- 特に，**漸近的対称空間**の解析学，その無限遠境界の**放物幾何**
- 双曲平面における幾何学・解析学の一般化
  - 「双曲平面」の発見は 1830 年前後．Lobachevsky と Bolyai
  - 「漸近的対称空間」の研究は 1980 年代以降
- 自分のもともとの動機は多変数複素解析



$$\pi = 3.14159265\cdots$$

1729

G. H. Hardy (1877–1947)

S. Ramanujan (1887–1920)

目に見えない数について話す
——（数学において）新しい概念をつくるということ

複素数 (complex numbers)——とは何だったか

$$i^2 = -1$$

という i を考える．実数 a, b により $a + bi$ と表される数を**複素数**という．

《計算例》

$$\begin{aligned}(2+i)(1-3i) &= 2(1-3i) + i(1-3i) \\ &= 2 - 6i + i - 3i^2 \\ &= 2 - 6i + i - 3 \cdot (-1) \\ &= 5 - 5i\end{aligned}$$

複素数 (complex numbers)——とは何だったか

$$i^2 = -1$$

という i を考える．実数 a, b により $a + bi$ と表される数を**複素数**という．

そんなものを勝手に考えていいのか？

- 感覚的にわからない．複素数はいったいどこにある？
- それは矛盾を引き起こさないのか？

複素数 (complex numbers)——とは何だったか

$$i^2 = -1$$

という i を考える．実数 a, b により $a + bi$ と表される数を**複素数**という．

そんなものを勝手に考えていいのか？

- 感覚的にわからない．複素数はいったいどこにある？
- それは矛盾を引き起こさないのか？

$(2 + i)(1 - 3i) = \cdots = 5 - 5i$ のような計算は，

- 数 i は $i^2 = -1$ という性質を持つ
- 複素数の掛け算は分配法則を満たす

といった複素数の公理 (axiom) だけでできた．

複素数の構成

既知のものを使って，複素数を構成する（実装する）ことを考える．

- 行列 (matrices) を使う方法**（今回はこれで）**
- 多項式 (polynomials) を使う方法
- ……

行列とは

数を表の形に並べたもの．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

行列の掛け算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

行列の掛け算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

行列の掛け算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

行列の掛け算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

行列の掛け算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

行列の世界で $i^2 = 1$

複素数を構成したいのだった．

行列には「2 乗して -1 になるもの」が確かにある．

行列の世界で $i^2 = 1$

複素数を構成したいのだった．

行列には「2 乗して -1 になるもの」が確かにある．

- 2×2 行列の世界で「1」の役割を果たすもの（**単位行列** identity matrix）

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- そして $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

行列による複素数の構成

《メモ》$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

複素数 $a + bi$ とは $aI + bA$ という行列のことであると約束する：

$$a + bi \overset{\text{定義}}{=} a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

この立場では，「$(2+i)(1-3i) = 5-5i$」とは

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

をコンパクトに表した式にすぎない．

公理と構成

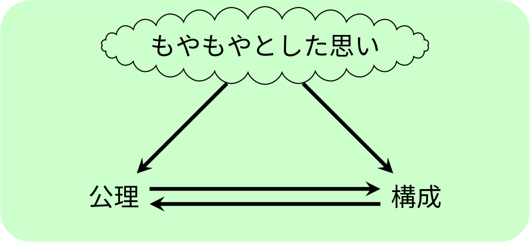
複素数の公理的定義（仕様／インタフェースの記述）

1. すべての実数は複素数でもある．
2. i と呼ばれる特別な複素数が存在する．これは $i^2 = -1$ を満たす．
3. 複素数について通常の四則演算ができる．分配法則なども成り立つ．
4. 任意の複素数 z に対し，$z = a + bi$ を満たす実数 a, b が存在する．

複素数の構成的定義（実装の記述）

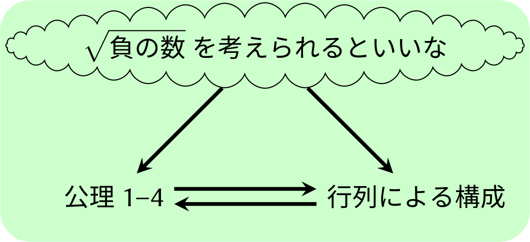
$aI + bA$ の形の行列を複素数と呼ぶ．ただし $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

公理と構成は車の両輪

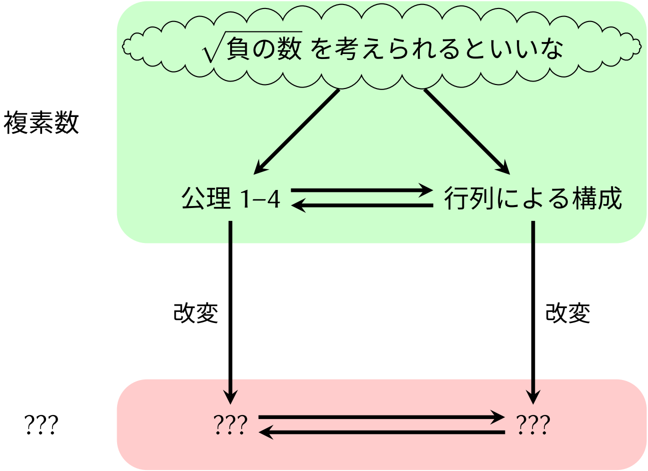


公理と構成は車の両輪

複素数



公理と構成は車の両輪



二重数 (dual numbers)

複素数の構成的定義

$aI + bA$ の形の行列を複素数と呼ぶ．ただし $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

これを改変してみましょう．

○○数の構成的定義

$aI + bA$ の形の行列を○○数と呼ぶ．ただし $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

二重数(dual numbers)

《$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の性質》

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$ （**零行列** zero matrix）

$aI + bA$ のことを，今度は $a + b\varepsilon$ と書く． $\varepsilon^2 = 0$ を満たす ε を新たに数として追加した．

二重数(dual numbers)

二重数の構成的定義（実装の記述）（の一例）

$aI + bA$ の形の行列を二重数と呼ぶ．ただし $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（$aI + bA$ のことを $a + b\varepsilon$ と書く.）

二重数の公理的定義（仕様／インタフェースの記述）

1. すべての実数は二重数でもある.
2. ε という二重数が存在する．これは 0 ではないが $\varepsilon^2 = 0$ を満たす.
3. 通常の加法・減法・乗法ができる．分配法則なども成り立つ.
4. 任意の二重数 w に対し，$w = a + b\varepsilon$ を満たす実数 a, b が存在する.

《気分》ε は「無限小」であり，ε^2 は小さすぎて無視できる.

二重数 (dual numbers)

《計算例》

$$
\begin{aligned}
(2+\varepsilon)(1-3\varepsilon) &= 2(1-3\varepsilon)+\varepsilon(1-3\varepsilon) \\
&= 2-6\varepsilon+\varepsilon-3\varepsilon^2 \\
&= 2-5\varepsilon
\end{aligned}
$$

二重数(dual numbers)

《応用例》微分の計算．$f(x) = x^2 + 3x + 4$ に対し

$$
\begin{aligned}
f(x+\varepsilon) - f(x) &= \left((x+\varepsilon)^2 + 3(x+\varepsilon) + 4 \right) - \left(x^2 + 3x + 4 \right) \\
&= (x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 + 3x + 3\varepsilon + 4) - (x^2 + 3x + 4) \\
&= 2x\varepsilon + \varepsilon^2 + 3\varepsilon \\
&= (2x+3)\varepsilon \\
&= f'(x)\varepsilon
\end{aligned}
$$

複素数と二重数の関係

複素数

$\sqrt{\text{負の数}}$ を考えられるといいな

公理 1–4 $\rightleftarrows$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ による構成

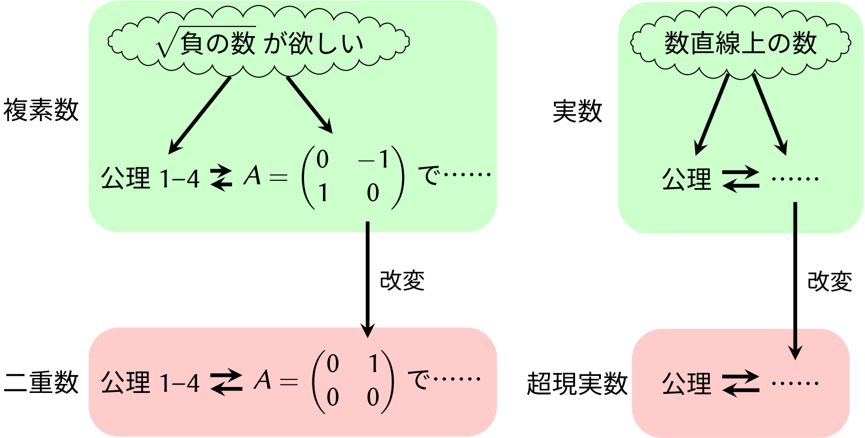
改変

二重数

公理 1–4 $\rightleftarrows$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ による構成

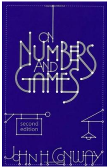
《問題》A をさらに別の行列に変えたら？ 2 個以上の行列を用いたら？

複素数と二重数，実数と超現実数



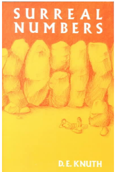
超現実数 (surreal numbers)

J. H. Conway



On Numbers and Games, 1976

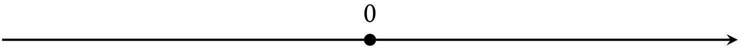
D. E. Knuth



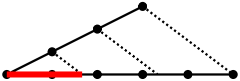
Surreal Numbers
—How Two Ex-Students
Turned on to Pure Mathematics
and Found Total Happiness, 1974

実数 (real numbers) とは何か

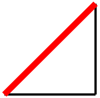
実数とは「数直線上に並ぶ数たちのこと」——どういう意味か？



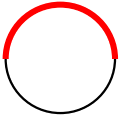
「長さとして実現される量はすべて実数」という取り決め？



$\frac{5}{3}$



$\sqrt{2}$



$\pi = 3.14\cdots$

でも——そうしたら $1.045390218\cdots$ は実数と言えるだろうか？

実数 (real numbers) とは何か

$\alpha = 1.045390218\cdots$ という実数が仮に存在するなら，こうなるだろう．

$$
\begin{aligned}
1 &< \alpha < 2 \\
1.0 &< \alpha < 1.1 \\
1.04 &< \alpha < 1.05 \\
1.045 &< \alpha < 1.046 \\
1.0453 &< \alpha < 1.0454 \\
1.04539 &< \alpha < 1.04540 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

これらの不等式をすべて満たす α の存在が保証された数体系が実数である．

実数の公理的定義（仕様／インタフェースの記述）

1. 実数について通常の四則演算ができる．
2. 実数同士には適切な性質を満たす大小関係がある．
3. 実数には**完備性**（completeness，連続性とも言う）がある．

実数 (real numbers) とは何か

$\alpha = 1.045390218\cdots$ という実数が仮に存在するなら，こうなるだろう．

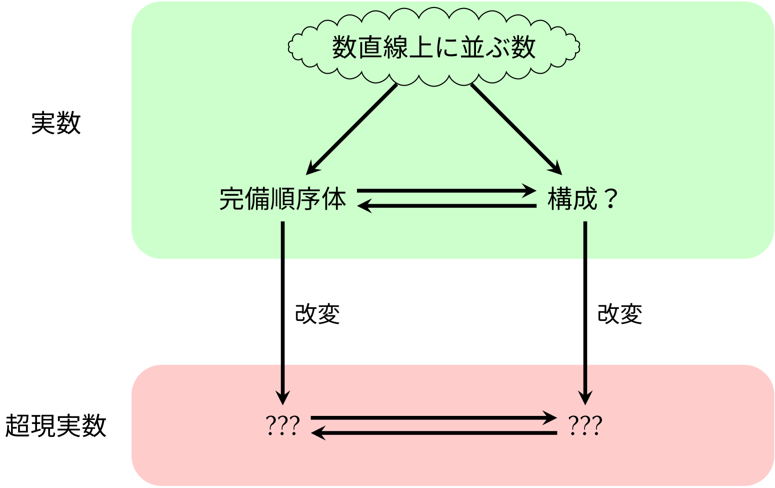
$$
\begin{gathered}
1 < \alpha < 2 \\
1.0 < \alpha < 1.1 \\
1.04 < \alpha < 1.05 \\
1.045 < \alpha < 1.046 \\
1.0453 < \alpha < 1.0454 \\
1.04539 < \alpha < 1.04540 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

これらの不等式をすべて満たす α の存在が保証された数体系が実数である．

実数の公理的定義（仕様／インタフェースの記述）

1. 実数全体の集合は**体**（たい，field）である．
2. さらに，実数全体の集合は**順序体** (ordered field) である．
3. さらに，実数全体のなす順序体は**完備** (complete) である．

ここまでの状況



実数の構成

$\alpha = 1.045390218\cdots$ は有限小数を と の 2 グループに分割している．

-7.34 1 (1.0) 1.04 0.859 1.045 1.0453 1.04539 $\vdots$ 1.010032	$< \alpha <$	2 2.185 1.1 1.05 1.046 1023 1.0454 (1.04540) $\vdots$ 4.9

こういうものを Dedekind の**切断** (cut, Schnitt) という．

✎ 普通は有限小数ではなくて有理数を使います．

実数の構成

より正確には——次の性質を満たす (,) を有限小数の**切断**という．

- と はどちらも空集合ではなく，共通の要素を持たず，さらに両者を合わせると有限小数全体になる．
- a , b となっていれば必ず $a < b$.

実数の構成的定義（実装の記述）

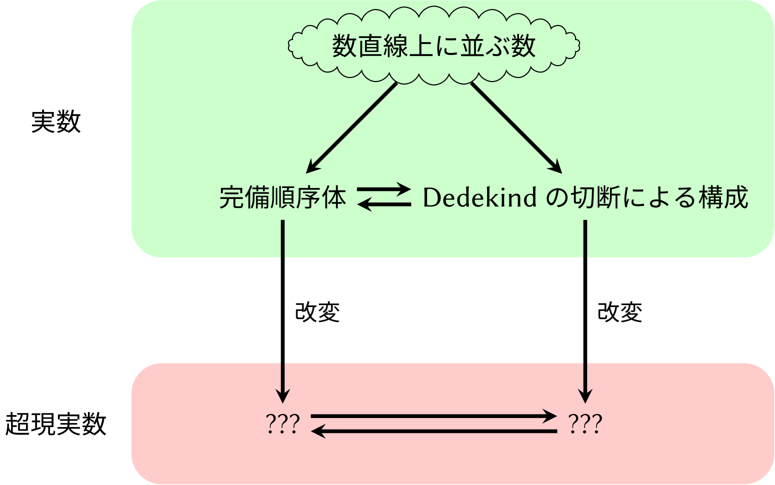
1. まず，すべての有限小数は実数でもある．
2. 次に有限小数の切断 (,) を考える．3 種類の状況がある．

 (i) の中に最大数がある．《例》1.35 以下／ 1.35 より大
 (ii) の中に最小数がある．《例》1.35 より小／ 1.35 以上
 (iii) (i) と (ii) のどちらでもない．

 ケース (iii) に該当する切断 (,) のことも実数と呼ぶ．

✎ 普通は有限小数ではなくて有理数を使います．**また N 進有限小数を用いてもよい．**

ここまでの状況



✎ Dedekind の切断ではなく Cauchy 列を用いる方法も一般的で，どちらも大切．

超現実数 (surreal numbers)

Dedekind の切断による実数の構成には，恣意的な制約が入りすぎでは？

- ケース (i), (ii) に該当する切断も「数」を定めていると考えたらどうなるか．
- や が空集合であってもよいとしたらどうなるか．
- 切断を考える操作を何度も繰り返してもいいのではないか．

✎ Conway がこんなふうに考えを進めたのかどうかはわかりません．想像．

超現実数の構成

そういった反省を踏まえて，より**自然**な構成を試みる．

超現実数の構成的定義（実装の記述）

- すべての 2 進有限小数は超現実数でもある．《例》$101.001101_{(2)}$
- すでに超現実数と認められた数の集合 , であって，

$$a, b \implies a < b$$

を満たすものがあるとき，ペア (,) のことも超現実数と呼ぶ．

- ✎ 2 進有限小数を使っていますが，これは本質的な変更ではない．
- ✎ と を合わせた集合に関する条件も削除された．
- ✎ 超現実数に対する $<$ の意味を定めないと上の定義は完結しない．だけど省略します．なお，本当は $<$ ではなく $\ngeq$ と書くべき．
- ✎ 以上の操作で得られるすべての超現実数が「新しい」ものではなく，重複もある．

超現実数の構成

そういった反省を踏まえて，より自然な構成を試みる．

超現実数の構成的定義（実装の記述）改良版

すでに超現実数と認められた数の集合 $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$ であって，

$$\boxed{a},\ \boxed{b} \quad \Longrightarrow \quad a < b$$

を満たすものがあるとき，ペア $(\boxed{\quad}, \boxed{\quad})$ のことも超現実数と呼ぶ．

《例》

$(\{\ \}, \{\ \})$　これを 0 と書く．

$(\{0\}, \{\ \})$　これを 1 と書く．

$(\{\ \}, \{0\})$　これを -1 と書く．

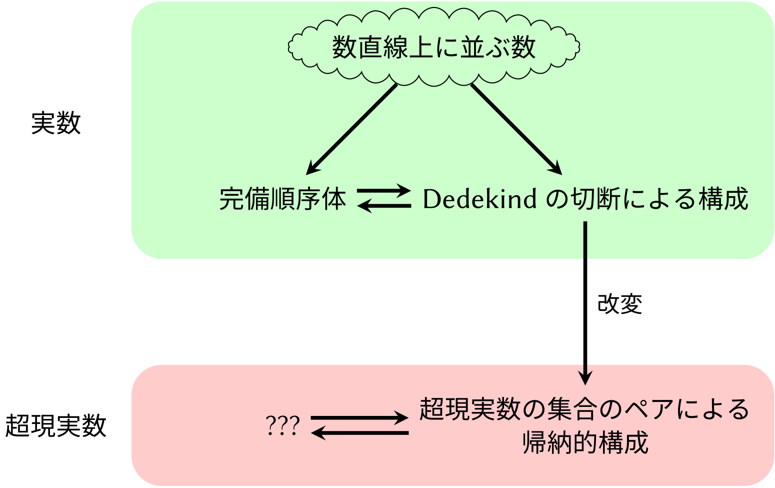
$(\{0, 1\}, \{\ \})$　これを 2（または $10_{(2)}$）と書く．

$(\{0\}, \{1\})$　これを $\frac{1}{2}$（または $0.1_{(2)}$）と書く．

超現実数——いくつかの例

- すべての実数は超現実数でもある．
- $\varepsilon = (\{\,0\,\}, \{\,0.1_{(2)}, 0.01_{(2)}, 0.001_{(2)}, 0.0001_{(2)}, \ldots\,\})$ という超現実数は
$$0 < \varepsilon < 0.1_{(2)}, \quad 0 < \varepsilon < 0.01_{(2)}, \quad 0 < \varepsilon < 0.001_{(2)}, \ldots$$
を満たす．これは実数の範囲には存在しない．「無限小」と言うべきもの．
- $\omega = (\{\,1_{(2)}, 10_{(2)}, 11_{(2)}, 100_{(2)}, \ldots\,\}, \{\ \})$ という超現実数は
$$1_{(2)} < \omega, \quad 10_{(2)} < \omega, \quad 11_{(2)} < \omega, \quad 100_{(2)} < \omega, \ldots$$
を満たす．これも実数の範囲には存在しない．「無限大」と言うべきもの．
- 超現実数の演算規則によれば，$\varepsilon\omega = 1$ が成り立つ．
- さらに $\sqrt{\omega} + e^{\varepsilon}$ なども意味を持つ．

実数と超現実数



実数
数直線上に並ぶ数
完備順序体
Dedekind の切断による構成
改変
超現実数
???
超現実数の集合のペアによる
帰納的構成

まとめ

複素数

$\sqrt{\text{負の数}}$ が欲しい

$i^2 = -1$ という i があって $\rightleftarrows$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で

実数

数直線上に並ぶ数

完備順序体 $\rightleftarrows$ Dedekind の切断で

改変

改変

$\varepsilon^2 = 0$ という ε があって $\rightleftarrows$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で

二重数

??? $\rightleftarrows$ 超現実数の集合のペアによる帰納的構成

超現実数

まとめ

数学は新しい概念をつくる
どうやって？——公理（仕様）の工夫，構成（実装）の改変

まとめ

数学は新しい概念をつくる
どうやって？——公理（仕様）の工夫，構成（実装）の改変

数学の本質はその自由性にある．
(Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.)

——G. Cantor (1845–1918)，1883 年の論文の中で

しかし論理に縛られているではないか．何からの自由か？

まとめ

数学は新しい概念をつくる
どうやって？——公理（仕様）の工夫，構成（実装）の改変

数学の本質はその自由性にある．
(Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.)

——G. Cantor (1845–1918)，1883 年の論文の中で

しかし論理に縛られているではないか．何からの自由か？
——人間の（あてにならない）直感，（不十分な）想像力からの自由